# ABİYEV'İN SİHİRLİ KARESİ, SİHİRLİ KARE METODLARI, MATLAB® SİHİRLİ KARELER VE UYGULAMA ALANLARI

**Burak FİDAN, Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILMAZ**

*Fizik Mühendisliği, Gaziantep Üniversitesi, 27310, Gaziantep*

burakfidan@gmail.com, mustafa.yilmaz@gantep.edu.tr

**ÖZET:** Bir sihirli kare, nxn boyutlu tamsayı matrisinden oluşur. Bu matrisin herbir satır, sütun ve köşegenler boyunca elemanların toplamı sabittir. Bu sabite *sihirli sabit* denir. Matris elemanlarını {1, 2, 3, ..., $n^2$} kümesinden, herbir eleman birden fazla kullanılmamak koşulu ile alır. Sihirli sabit, girilen n sayısı ile aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$S=n*(n^2+1)/2$

Abiyev'in sihirli karesi ile istenilen sayılardan (tamsayı, gerçel sayı, karmaşık sayı) istenilen derecede (n - ∞) sihirli kare oluşturmak mümkündür. Abiyev'in sihirli karesini diger algoritmalardan ayıran bir başka özellik ise dengedir. Bu algoritma ile yazılan herbir eleman yerine bulunduğu koordinatta elemanın sayısal değeri kadar aynı birimden kütle konulduğunda ağırlık merkezi sihirli karenin tam ortası olmaktadır. Bundan dolayı bu metot ile yazılan sihirli karelere **Dengeli Kare** de denilebilir. Abiyev'in sihirli kare metodu, Franklin sihirli kare metodu, Tien Tao Kuo, Kwon Yong Shin, Tamori sihirli kare metodları, ve MATLAB® ile üretilen sihirli karelerin karşılastırılması amaçlanmaktadır.

Ayrıca bu yazıda, Kriptoloji, oyun (Sudoku), Matematik (Vectör uzayı), Fizik (kütle merkezi – noktasal yüklerden oluşan sistemde elektrostatik moment merkezi) gibi konularda sihirili kare kullanım teknikleri açıklanması amaçlanmıştır.

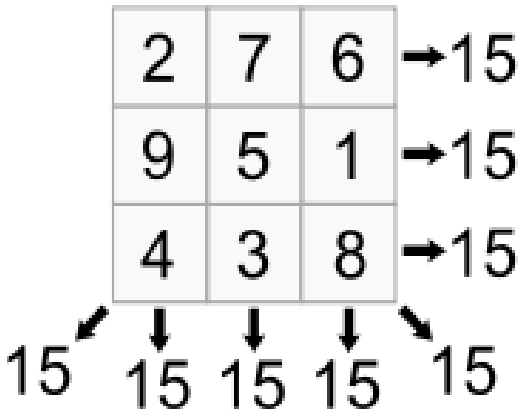
**Anahtar elimeler:** Sihirli kare, Dengeli kare, MATLAB®, sihirli kare metodları, sihirli kare uygulama alanları, kriptoloji, sudoku, elektrostatik moment, vektör uzayı ve sihirli kareler.

## 1. GİRİŞ

Hayatımıza milattan önce girmiş, ve halen günümüzde de kullanılmaya devam eden sihirli kareler, ilk olarak milattan önce 650 yıllarında çıkmış ve o zamanlardan günümüze, manevi olarak manası olan esyalara, giysilere, çeşitli yerlere bastırılmış veya işlenmiş olarak karşılaşmaktayız. 1550 yıllarında, rönesansdan önce avrupalı biliminsanlarının bazı resimlerinin üzerine sifrelenmiş olarak karşılaşmaktayız. Albrecht Dürer tarafından 1514 yılında çizilmiş, Melencolia adlı resimdede 4x4 lük bir sihirli kare mevcuttur. Hali hazırda günümüzde, sifreleme metodlarında, matematiksel algoritmalarında kullanılmaya devam edilmektedir.

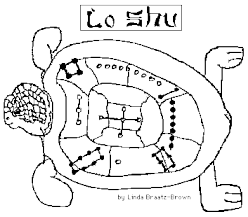
Öyle bir matris düşününki, nxn boyutlarında kare matris olsun, satır, sütun ve köşegenlerinin toplamı tek bir sabit verebilen karelere *sihirli kare* denir. Sihirli kareler, karede yerleşecek olan elemanlarını {1,2,3,...$n^2$} kümesinden almaktadır. Bahsi geçen sihirli sabit ise S = n{$n^2$+1}/2 formülünden hesaplanmaktadır. **Örnek:** 3 derece de sihirli kare düşünün:

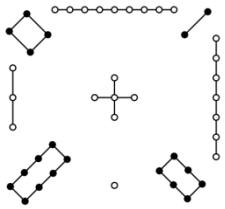
$$S = 3 * \left\{\frac{3^2+1}{2}\right\} = 15$$



## 2. SİHİRLİ KARE TARİHİ

Sihirli kareler ilk olarak milattan önce 650 yıllarında Çin de astroloji, felsefe yorumlarda, doğa olayları ve insan davranışları üzerinde kullanılmış yorumlanmıştır. O zamanlarda Çinde bulunan nehirin kışları aşırı derecede taşması sonucu Çinliler, meşhur sihirli karelerden de olan Lo Shu kaplumbağasını yaptılar. Onların inanışlarına göre, bu sayede ne kadar kayıp, kurban verebileceklerini kestirmekteydi aşağıdaki şekilde, Lo Sho kaplumbağası görülmektedir.



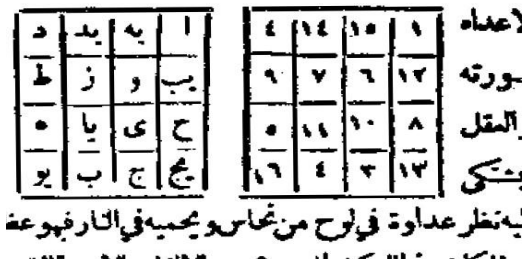



| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

*Şekil.2* *Şekil.3* *Şekil.4*

*Şekil.2: Lo Sho kaplumbasının orjinal görüntüsü*
*Şekil.3: Lo Sho kaplumbasının üzerindeki sihirli karenin noktalarla ifadesi*
*Şekil.4:Kaplumbağanın üzerindeki noktaların sihirli karede gösterimi*

Sihirli kareler, 7. ~ 8. yüzyıllarda Arap dillerinin yaygınlaştığı yerlerde görülüp, buralarda sihirli karelerin geliştirildigi görülmektedir. Yan tarafta arap harflerle yazılmış bir sihirli kare görülmektedir. 10. yüzyıllarda ise sihirli kareler hindistanda ritüellerde kullanıldığı, bazı manevi kıyafetlere, eşyalarına işlendiği görülmektedir. Aynı durum 18. yüzyıllara geldiğimizde Afrikada da aynı durum gözlenmektedir. Sihirli kareler matematikçilerle tanışması 19. yüzyıl sonlarına doğru olacaktır. Sihirli kareler matematikçilerle tanıştığı zaman sihirli kareler olasılık, analiz gibi matematiksel konularda kullanılacaktır.



## 3. Sihirli kareler ile ilgili genel bilgiler

Sihirli kareler n, 2'den büyük olacak şekilde kare matrisdir. Ancak öyle matrislerdir ki, satır, sütün ve köşegenler toplamı tekbir sabite eşittir ve bu sabite, *sihirli sabit* denir. Sihirli sabit, n matris derecesine karşılık gelecek şekilde $S = n(n^2+1)/2$ den hesaplanabilir.

Sihirli karelerde çeşitli metodlar mevcuttur bunlardan birkaçını sıralayacak olursak:

- Franklin sihirli kare metodu
- Tien Tao Kuo sihirli kare metodu
- Kwon Yong Shin sihirli kare metodu
- Tamori sihirli kare metodu
- Abiyev sihirli kare metodu
- Matlab® ile oluşturulan sihirli kareler

## 4. Abiyev'in sihirli kare metodu

Abiyev'in sihirli kare metodunda, sihirli kare derecesi (n) elemanlı 4 adet dizi tanımlanır ve herbir dizinin farklı renk ve artış oranları vardır. Aşağıdaki tabloda dizliler, artış oranları ve renkleri verilmiştir:

**Örnek:** c =1 iken; (c: adımımızı temsil eder, ve n/2 e kadar ilerler)

$\alpha 1 = 1, 2, 3, ..., n$
$\beta 1 = n, 2n, 3n, ..., n^2$
$\gamma 1 = n^2, n^2-1, ..., n^2-(n-1)$
$\delta 1 = n^2-(n-1)-n, n^2-(n-1)-2n, ..., 1$

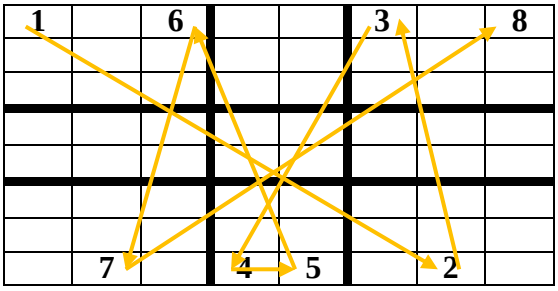
| Dizi | Ortak Fark | Renk |
|---|---|---|
| Alfa | +1 | |
| Beta | +n | |
| Gama | -1 | |
| Delta | -n | |

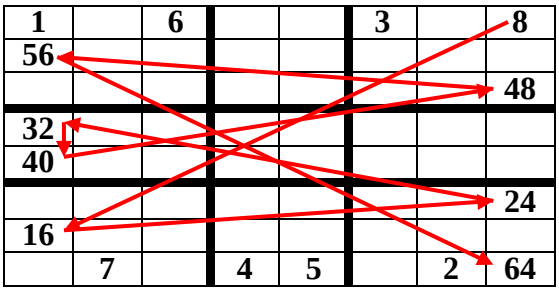
**Abiyev Algoritması:**

Abiyev algoritmasını daha anlaşılır olabilmesi için, algoritmayı n=8 iken başlatacağım ve tüm sayıları algoritmaya göre takip edip tüm 8. Derece sihirli kareyi tamamlayacağız.

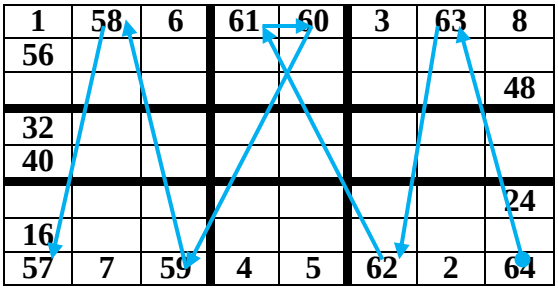
***Birinci adım:*** c=1, n=8

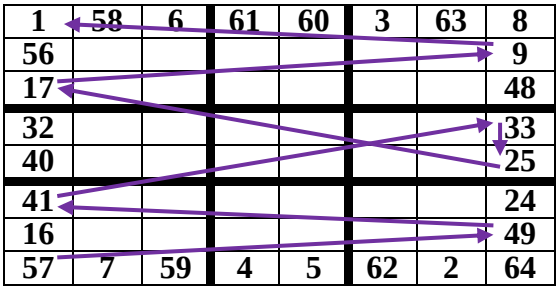
α 1=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 β1=8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64





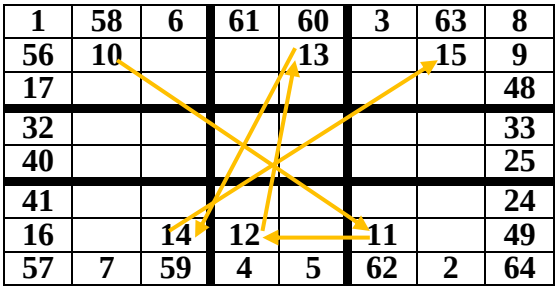
Ɣ1=64, 63, 62, 61, 60, 59, 58, 57 δ1=57, 49, 41, 33, 25, 17, 9 1

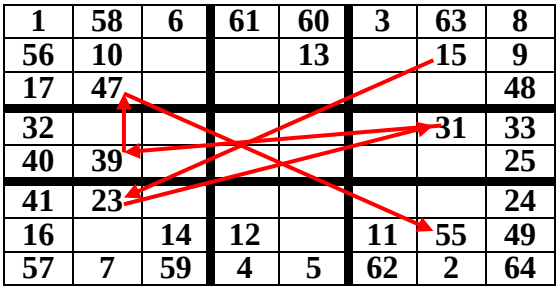




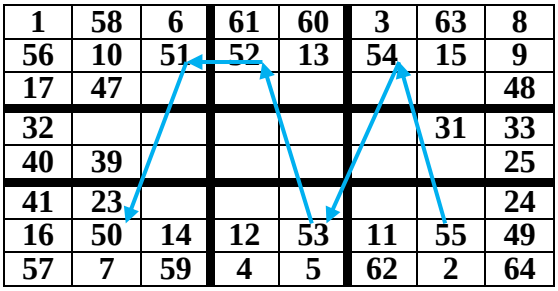
***İkinci adım:*** c=2 n=8

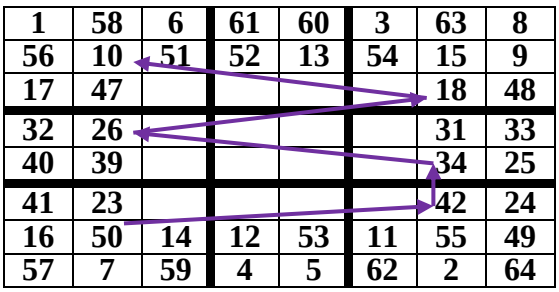
α2=10, 11, 12, 13, 14, 15 β2=15, 23, 31, 39, 47, 55





Ɣ2=55, 54, 53, 52, 51, 50 δ2=50, 42, 34, 26, 18, 10





***Üçüncü adım:*** ***c=3, n=8***

α3=19, 20, 21, 22 β3=22, 30, 38, 46

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 58 | 6 | 61 | 60 | 3 | 63 | 8 |
| 56 | 10 | 51 | 52 | 13 | 54 | 15 | 9 |
| 17 | 47 | 19 | | | 22 | 18 | 48 |
| 32 | 26 | | | | | 31 | 33 |
| 40 | 39 | | | | | 34 | 25 |
| 41 | 23 | | 21 | 20 | | 42 | 24 |
| 16 | 50 | 14 | 12 | 53 | 11 | 55 | 49 |
| 57 | 7 | 59 | 4 | 5 | 62 | 2 | 64 |

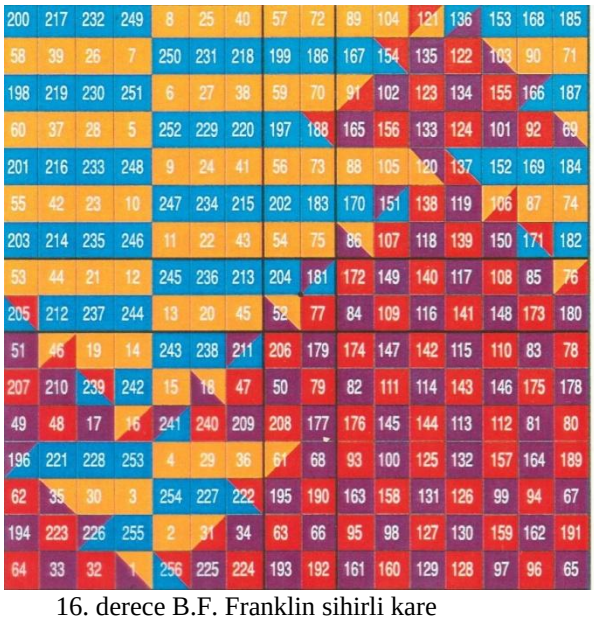
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 58 | 6 | 61 | 60 | 3 | 63 | 8 |
| 56 | 10 | 51 | 52 | 13 | 54 | 15 | 9 |
| 17 | 47 | 19 | | | 22 | 18 | 48 |
| 32 | 26 | 38 | | | | 31 | 33 |
| 40 | 39 | 30 | | | | 34 | 25 |
| 41 | 23 | | 21 | 20 | 46 | 42 | 24 |
| 16 | 50 | 14 | 12 | 53 | 11 | 55 | 49 |
| 57 | 7 | 59 | 4 | 5 | 62 | 2 | 64 |

Algoritmada da görüldüğü gibi, Abiyev'in algoritmasında herbir dizinin kendine ait bir dizilimi vardır. Alfa, beta, gama ve delta dizilerinde sihirli karenin ortasında oluşan ve benimde koyu renkle gösterdiğim artı içerisinde algoritmanın akış yönü tersine dönüp, artı içerisinden çıkarken tekrar düzelmektedir. Bu algoritmaları takip ettikden sonra son olarak elimize aşağıda gösterilen Abiyev sihirli karesi mevcut olacaktır:

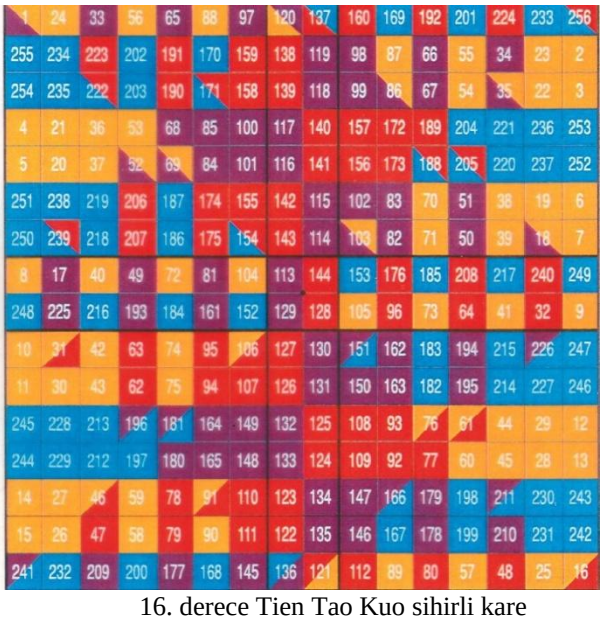
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 58 | 6 | 61 | 60 | 3 | 63 | 8 |
| 56 | 10 | 51 | 52 | 13 | 54 | 15 | 9 |
| 17 | 47 | 19 | 44 | 45 | 22 | 18 | 48 |
| 32 | 26 | 38 | 37 | 36 | 27 | 31 | 33 |
| 40 | 39 | 30 | 29 | 28 | 35 | 34 | 25 |
| 41 | 23 | 43 | 21 | 20 | 46 | 42 | 24 |
| 16 | 50 | 14 | 12 | 53 | 11 | 55 | 49 |
| 57 | 7 | 59 | 4 | 5 | 62 | 2 | 64 |

## 5. Abiyev'in sihirli kareleri ve diğer sihirli karelerle karşılaştırılması

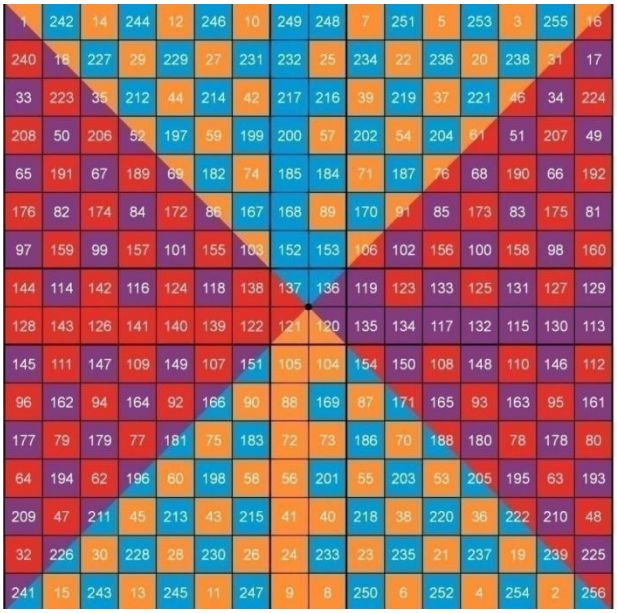
Karşılaştırmamda, 16 dereceden sihirli kareler kullanacağım. Karşılastırmam doğal kareye yakınlık, fiziksel, matematiksel kullanılabilirlilik açısından olacaktır. Yukarıda gösterdiğimiz dizilimde, ok renkleri aslında okun gösterdiği kutunun rengini tasfir etmekte ve aynı kutuyu birden fazla renkde ok işaret ediyorsa, o kutunun yarısını bir renk diger yarısını diger renk ile boyamamız gerekmektedir. Burda belirtilen işlem doğrultusunda, yapılan işlemler sonucu olusan sihirli kare metodları aşağıda belirtilmiştir. Diğer sihirli kare metodlarıda aynı boyama işlemi ile boyanmıştır.



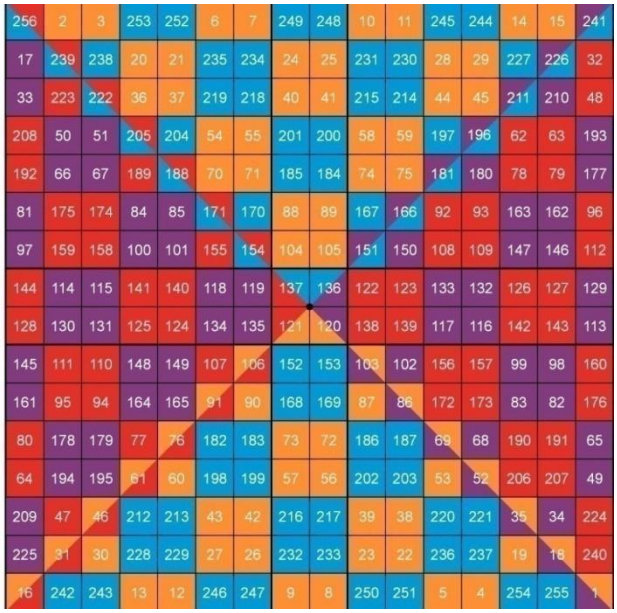
16. derece B.F. Franklin sihirli kare



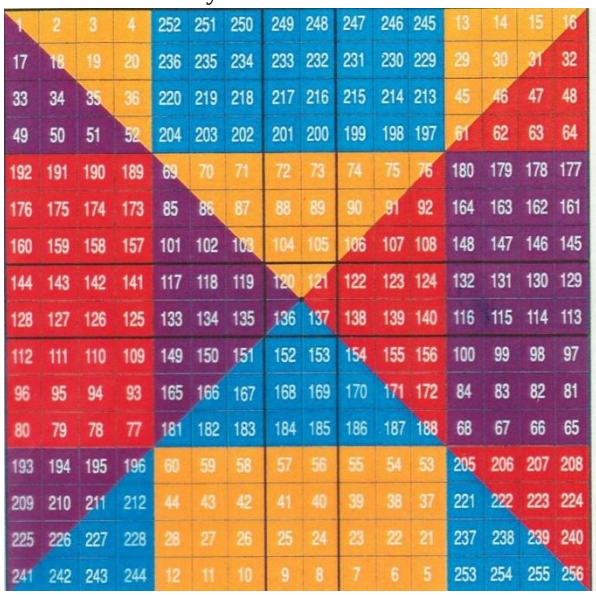
16. derece Tien Tao Kuo sihirli kare



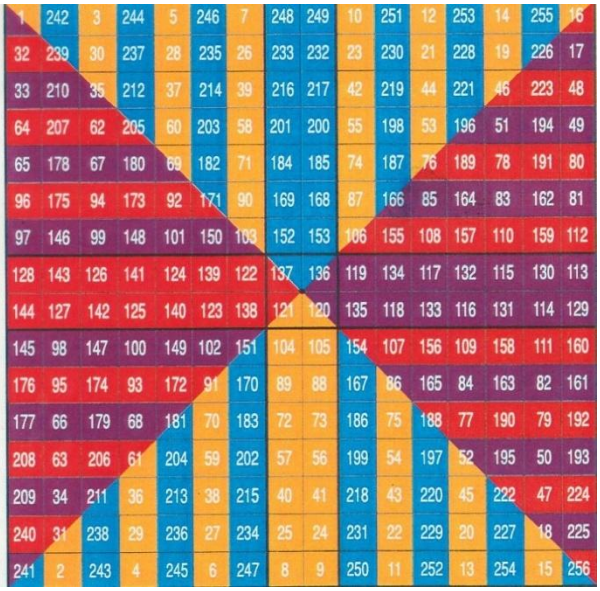
16. derece Abiyev sihirli kare



16. derece Matlabsihirli kare



16. derece Kwon Yong Shin sihirli kare



16. derece Tomari sihirli kare

Görüldüğü üzere Abiyev'in sihirli karesi doğal karelere en yakın olan sihirli karelerden birisidir. Ancak Abiyev'in sihirli karelerinde öne çıkan başka bir başlık ise, dengedir. Abiyev'in sihirli karelerinde herbir hücrede yer alan numara sayısı kadar üzerlerine, aynı birimden kütle, noktasal yük koyduğumuz zaman siztemin ağırlık merkezi, ve sistemin dipol moment merkezi olmasıdır. Bu konu ile ilgili olarak yazımın ilerisinde tekrar bahsedeceğim.

## 6. Matlab'da Sihirli Kareler

Matlab® üzerinde sihirli karelerin oluşturması için hali hazırda komutlar bulunmaktadır. Komut ekranına magic komutunu yazdıkdan sonra parantez içerisinde, üretmek istediğimiz sihrili kare boyutunu girmemizle oluşturabildiğimiz komuttur.

```
magic(8)                    % 8x8 sihirli kare oluşturuldu.
```

Matlabda oluşturduğumuz kare matrisin gerçekten bir sihirli kare olup olmadığını kontrol için ilk başta satır, sütun ve köşegenlerin toplamı tek bir sabit olup olmadığıdır.

Bu işlem içinde aşağıdaki komutlar girilebilir:

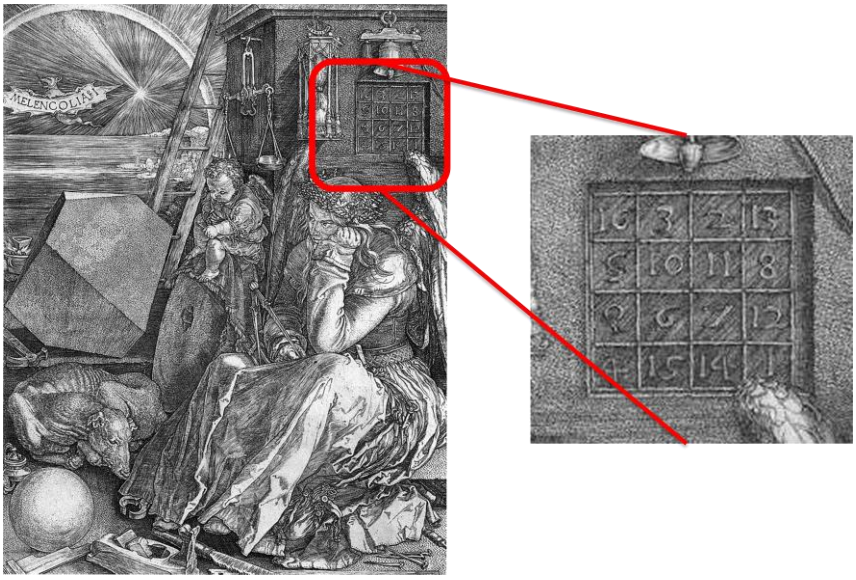
```
x = magic(3)            % 3. derece sihirli kare oluşturuldu ve x değişkenine atandı.
sum(x)                  % Sihirli karenin satır toplamlarını bastırıldı.
    >15 15 15
sum(x')'                % Sihirli karenin sütun toplamlarını bastırıldı.
    >15
      15
      15
sum(diag(x))            % Sihirli kare köşegenler toplamını bastırıldı.
    15
```

Bu işlemler sonucunda, sihirli karelerin tanımında da geçtiği gibi bir kare matrisim sihirli kare olabilmesi için, satır, sütun ve köşegenler toplamı tek bir sabit olması gereklidir. Matlab da yapılan işlemlerlede bunun doğruluğunu göstermiş olduk.

Tarihde var olan ünlü bir sihirli karelerden biri olan, *Albrecht Dürer* tarafından 1514 yılında *Melencolia* adında resmi resmede biliriz. Bunun komutu aşağıdaki gibidir:

```
load durer
image(x)
colormap(map)
axis image
```

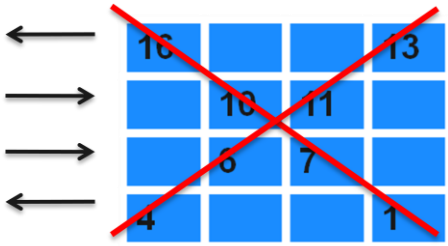
Komutlar girildiği zaman karşımıza resmedilen resim ve gizli sihirli kare aşağıdaki gibidir:

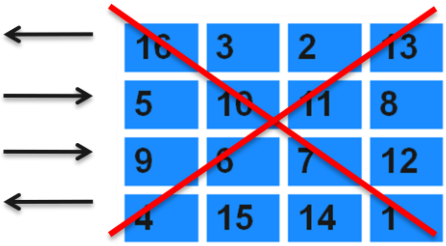



Dürer bu resimde şifreleme olarak nasıl bir anahtar kullanıldığı bilinmiyor, bilinen tek şeyse, Dürer bu sihirli karelerin enalt satırında, ortada resmettiği tarih saklıdır. 1514

Sihirli kare oluşturmada, çeşitli yöntem kullanılmaktadır. Dürer bu resminde sihirli kare oluşturmak şu yolu takip etmiştir:

- Öncelikle, sihirli karelerin üstüne geçici olarak köşegenleri çizilir.
- İkinci olarak, sag alt hücreden başlayarak yanlızca köşegen çizgileri ile sihirli kare kesişen hücrelere o anki numara yazılır ve bu sol üst hücresine kadar devam ettirilir.
- Son olarak, bu sefer sağ üst hüceden başlayarak, boş olan kısımlara numaralar yerleştirilir.



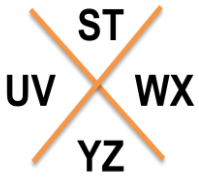



## 7. Sihirli Kareler ve Uygulama Alanları

### 7.1. Kriptoloji

| | | |
|---|---|---|
| **AB** | **CD** | **EF** |
| **GH** | **IJ** | **KL** |
| **MN** | **OP** | **QR** |

Sihirli kareleri, kriptolojide kullanımda yardımcı bir anahtarla birlikte yapılmaktadır. Bu anahtar yandaki gibi oluşturulabilir. Anahtar tablomuzdan, sifrenecek kelimemizden harfleri tek tek tabloda bulunduğu şekilleri alınarak oluşturulur. Harflerin anahtar tablomuzda bulunduğu şeklinden demek istediğimiz örnek olarak "A" harfinin bulunduğu şekil " " dir. Yanlız dikkatimizi çekmemiz gereken bir nokta var, şayet anahtar tablosundan alacağimiz kelimemiz ikinci sıradaysa, bu durumda, seklimizin içerisine, nokta koymalıyız. Örnek olarak bu seferde "B" harfi kullanalım ve sifre şeklimiz, " " şeklinde olacaktır. Örnek olarak, kendi ismim şu şekilde kodlaya bilirz:



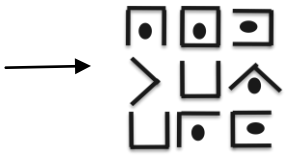

Şifrelemek istediğimiz kelimemiz hazır, bundan sonra kelimemizi sihirli karelerdeki sayıların dizilimlerine göre dizebiliriz.

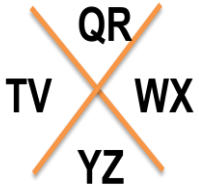
Bu noktaya kadar şifreleme pekde "sifre" gibi gelmiyor olabilir. Şayet ilk olarak bir kelime belirler ve (belirlenen kelime de harf tekrarlanmaması gereklidir) bu kelimemizi anahtar tablomuza yerleştirdikden sonra tablomuz tamamen değişecek. Hatta kelimemiz ilk kısma degilde rasgele seçilmiş kısma koymamızla birçok olasılık yaratacak bir şifreleme kazanmış oluruz. Ayrıca sifrelenecek kelimemizi, sihirli karelerde dizerken bilindik bir teknik değilde, Dürer de olduğu gibi kendimizin belirleyeceğimiz bir dizilimle sihirli kare oluşturursak kelimemiz daha kırılması zor hale gelir.

| | | |
|---|---|---|
| **US** | **AK** | **BC** |
| **DE** | **FG** | **HI** |
| **JL** | **MN** | **OP** |

Örnek bir kodlama olarak ben anahtar tablomun baslangıcı olarak "USAK" kelimesini seçtim ve anahtar tablom şekildeki gibi oldu. Şekilde görüldüğü gibi sadece ilk kelimeleri değiştirmemizle beraber tablolar dan alınıcak şekiller tamamen değişmiş oldu. Bu anahtar tablomdan aldıgım kollamalarla beraber, Abiyev'in sihirli karelerinde sıraya göre yerleştirdim;

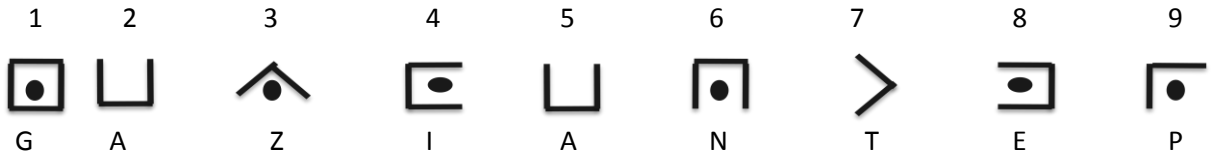
| | | |
|---|---|---|
| **6** | **1** | **8** |
| **7** | **5** | **3** |
| **2** | **9** | **4** |






Çözümleme:

Çözümlemede, öncelikle sihirli kareden başlıyoruz ve sihirli karenin hangi hücresinde birinci harf var ise, kodlamış olduğumuz tablodaki o şeklimiz bizim birinci harfimiz oluyor. Sonrasında ise anahtar tablomuzda ilgili şekilin karşılığını buluyoruz ve herbir hücre için bunu aynen tekrar uyguluyoruz.




### 7.2. MATEMATİK – Vektör uzayı ve sihirli kareler

Vektör uzayı, matematikde ölçeklenebilir ve eklenebilir vektörler topluluğudur. n. derece sihirli kare, nxn matris olarak düşünülebilir ve vektör uzayının sahip olduğu tüm özellikler, sihirli karelere uygulanabilir.

X, Y ve Z n. dereceden sihirli kareler olsun,

- X ve Y nin toplamı yine bir sihirli kare olur
- X+Y=Y+X
- X+(Y+Z)=(X+Y)+Z
- X+X'=X'+X=0
- a(X+Y)=aX+aY
- (a+b)X=aX+bY
- (ab)X=a(bX)

Vektör uzayında işlemlerden biride nokta çarpımıdır. Bu işlem aynı şekilde Sihirli karelerede uygulanabilir.

| | | |
|---|---|---|
| **6** | **1** | **8** |
| **7** | **5** | **3** |
| **2** | **9** | **4** |

●

| | | |
|---|---|---|
| **6** | **1** | **8** |
| **7** | **5** | **3** |
| **2** | **9** | **4** |

=

| | | |
|---|---|---|
| 89 | 107 | 89 |

### 7.3. OYUN – Sudouku ve sihirli kareler

Sudoku, satır ve sütunlarının toplamı eşit olan 3x3 matrisdir ve herbir satırda veya sütunda 1'den 9'a kadar sayılar birer kere yazılma şartı vardır. Bu özelliklerinden dolayı sudoku 3.dereceden 9 adet sihirli kareden oluşmaktadır.

İlk sudoku 19. yüzyılda, Fransa da sihirli karelerden bazı numaraların kaldırılmasıyla başladı. Sudoku, 3. derece sihirli karelerin tekdüze dizilip kolon ve sütun olarak diziliminden oluşur. Sonrasında satır ve sütunlardan sayılar çıkarılak sudoku zorluk derecesi artar.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 | 5 | 8 | 9 | 4 | 1 | 7 |
| 8 | 5 | 4 | 2 | 7 | 1 | 3 | 6 | 9 |
| 9 | 7 | 1 | 6 | 4 | 3 | 8 | 2 | 5 |
| 4 | 6 | 8 | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 3 |
| 7 | 2 | 3 | 9 | 6 | 4 | 5 | 8 | 1 |
| 1 | 9 | 5 | 7 | 3 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 8 | 7 | 3 | 9 | 2 | 1 | 5 | 4 |
| 5 | 4 | 9 | 8 | 1 | 7 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 9 | 7 | 8 |

### 7.4. FİZİK - Sihirli kare merkezindeki Elektrostatik Potensiyel

Öncedende belirtildiği gibi, sihirli karelere üzerilerindeki sayılar kadar aynı birimde kütle, elektriksel yük vs. konulduğu zaman sistemin ağırlık merkezi Abiyev'in sihirli karesinin tam orta noktası olmaktadır. Abiyev'in sihirli karelerinde, herbir hücre yerine üzerindeki sayılar kadar noktasal yük koyduğumuzu var sayalım,

Sihirli karelere konulan yükler, elektrik dipol moment oluşturacaktır. Elektrik dipol moment yüklerden oluşan sistemin negatif veya pozitif kutuplarını belirlememize yardımcı olur ve sistemin yük dağılımının geometrisi (büyüklüğü, şekli ve yoğunluğu) ile belirlenir. Noktasal yüklerin oluşumundan sistemin dipol momenti:

$$P = \sum_{i=1}^{n} q_i r_i$$

Formülde $q_i$ nin merkezden olan uzaklığına $r_i$ ile isimlendirilmiştir. Sihirli karede noktasal yükleri yerine koyduğumuz zaman, herhangi derecedeki sihirli karelerin dipol momentleri sıfıra eşittir.

$$P = \sum_{i=1}^{n} q_i r_i = 0$$

**KAYNAKÇA:**


1. **Dartl Lynn Steohens, B. S. Ed., M. Ed., Matrix Properties Of Magic Squares**
2. **Introduction to MATLAB, mathworks.com**
3. **Dan Brown, The Lost symbol**
4. **Timo Mantere and Janne Koljonen, Solving and Rating Sudoku Puzzles with Genetic Algorithms**
5. **Peyman Fahimi and Babak Jaleh, The electrostatic potential at the center of associative magic squares**